Kombinatorika a pravděpodobnost v matematice pro každého kombinatorika a pravděpodobnost kolem nás

prof. zw. dr hab. Adam Płocki

professor State Higher Vocational School in Nowy Sącz (Polsko)
em. profesor Pedagogické univerzity v Krakově (Polsko)
dr honoris causa Univerzity J.E.Purkyně v Ústi nad Labem (Česko)
profesor emeritus Katolické univerzity v Ružomberku (Slovensko)

Olomouc, listopad 2015

V pušce myslivce, který míří na zajíce, se nacházejí tři náboje. Pravděpodobnost, že se střelec do zajíce trefí napoprvé, se rovna $\frac{9}{10}$. Pokud se netrefí, střílí podruhé. Nyní je pravděpodobnost zásahu rovna $\frac{8}{10}$. Pokud se podruhé zase netrefí, míří potřetí. Pravděpodobnost, že se mu podaří trefit zajíce napotřetí, je rovna $\frac{7}{10}$. Vypočítej pravděpodobnost, že zajíc bude zatřelen.

Úlohy se týkají světa ,,kolem nás'', a tedy nematematických situací a problémů. Jsou to mimo jiné otázky:

- Zda určitá skutečnost je výsledkem vědomosti, talentu, jistých schopností nebo hádání (tedy náhody)?
- Zda známka z testové zkoušky je věrohodná?
- Jaké je riziko (nebezpečí), že žák uspěje v testu, i když nemá žádné znalosti a odpovědi pouze hádá?

Hledání odpovědí na tyto otázky se začíná překladem problému do jazyka matematiky, tj. vytvořením jisté matematické úlohy.

jev prakticky nemožný - pravidlo praktické jistoty

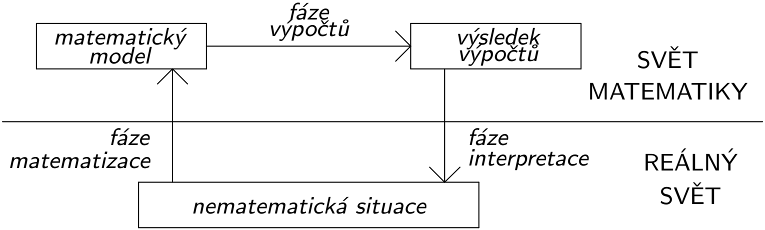
Jev spojený s náhodným pokusem δ nazýváme prakticky nemožný, pokud je jeho pravděpodobnost menší než $0,05$. Jev nazýváme prakticky jistý, pokud je jeho pravděpodobnost větší než $0,95$.
Číslo $\alpha = 0,05$ nazýváme hladina významnosti.
Úsudky týkající se procesu rozhodování a verifikace jistých hypotéz se opírají o následující pravidlo praktické jistoty:
Jestliže je jev prakticky nemožný, můžeme si být prakticky jistí, že nenastane.

Matematizace v stochastice pro učitele

Podle Hanse Freudenthala učit matematizovat je hlavním cílem vyučování matematice a matematického vzdělávání, přitom teorie pravděpodobnosti vedle geometrie poskytuje nejlepší příklady ukazující, jak se matematizuje. Freudenthal chápe matematizaci jako popisování (uspořádání) reality pomocí pojmů a jazyka matematiky.

Z hlediska didaktiky matematiky ,,matematizovat" fragment reality znamená nahlížet tento fragment přes ,,matematické brýle". Přes tyto ,,brýle" vidíme jen nejdůležitější fakty, naopak zanikají fakty druhořadé. Přes tyto ,,matematické brýle" krabička zápalek vypadá jako pravouhlý rovnoběžnostěn, o kterém se mluví v geometrii, železniční spojení mezi Přerovem a Olomoucí jako úsečka, a zápalka při losování pomocí zápalek jako koule. Plán železničních tratí v České republice je výsledkem procesu matematizace.

Tři fáze procesu používání matematiky



Rys. 1

Znamení zvěrokruhu 12 náhodně se setkaných lidí a matematizace

Z abecedního seznamu studentů na své přednášce stochastiky (na sekci učitelské) vyberu prvních dvanáct. Držím v ruce 12 mincí o hodnotě 1 euro a uzavírám sázku z těmito studenty, a to takovou: — Jestliže se každý z vás narodil v jiném znamení zvěrokruhu, dám každému euro. Ale jestli jsou mezi vámi alespoň dvě osoby narozené ve stejném znamení zvěrokruhu, dá mi každý z vás 1 euro.

Opakuji tuto sázku ve skupině dalších 12 studentů v tomto seznamu. V situaci, kdy je na přednášce 120 studentů tuto sázku opakuji desetkrát. Ještě nikdy jsem takovou sázku neprohrál (nikdy jsem také nevzal vyhrané částky od studentů).

Vzniká tedy otázka:

— Proč prakticky v každé skupině 12 náhodně se setkaných lidí jsou aspoň dvě osoby, ktere se narodily ve stejném znamení zvěrokruhu? Jak vysvětlit tento překvapivý empirický fakt pomocí matematiky?

Jde o refleksi *a posteriori*, která inspiruje úlohu na vypočítání pravděpodobnosti některého jevu. Ale tyto výpočty předchází matematizace (jde o konstrukci pravděpodobnostního prostoru, ve kterém se budou provádět tyto výpočty).

Očíslujme znamení zvěrokruhu čísly od 1 do 12. Zajímá-li nás znamení zvěrokruhu osoby, kterou náhodně potkáme, pak je tato osoba koulí vylosovanou z urny, ve které je 12 kouli očíslovanych od 1 do 12. Skupina 12 náhodně se setkaných lidí se stává výsledkem 12-násobného losování s vracením koulí z této urny. Tento náhodný pokus δ_{12} (už jako objekt stochastiky) je simulačním schématem jisté nematematické situace. Je to příklad procesu matematizace.

Jev

$$A = \{\textit{každá koule vylosovaná v pokusu } \delta_{12} \textit{ bude s jiným číslem}\}$$

je prakticky nemožný, neboť máme

$$P(A) = \frac{12!}{12^{12}} \approx 0,000\ 053\ 723.$$

Tento matematický fakt má svou interpretaci v ,,rovině reality". Je prakticky nemožné, aby ve skupině dvanácti náhodně se setkaných osob se každá narodila v jiném znamení zvěrokruhu.

Rozhodování pomocí stochastiky, zda určitá skutečnost je výsledkem vědomosti, talentu, jistých schopností nebo hádání, tedy náhody.

Řekl student pravdu?

Student si měl připravit ke zkoušce odpovědi na 40 otázek. Na dve otázky, které mu dal zkoušející, neuměl odpovédět, a tak řekl: - To mám smůlu! To jsou jediné dvě otázky, na kterým neznám odpověd'!. Může to být pravda, nebo je třeba o jeho výroku pochybovat?

$$\frac{1}{780} \approx 0,00126$$

Zda známka z testové zkoušky je věrohodná?

Na hodině chemie žák dostává soubor 40 názvů chemických sloučenin. Mezi nimi jsou dva aldehydy, které je třeba podtrhnout. Při správném označení obou aldehydů žák dostane pozitivní známku (jako ohodnocení jeho znalostí z chemie). Je tato pozitivni známka věrohodna?

Někdo udal?

Ze zahraničí se vracela skupina 40 turistů a mezi nimi byli dva pašeraci. Na hranici vzal celník k osobní prohlídce dva turisty a ukázalo se, že oba jsou pašeráci. Někdo jiný na tuto skutečnost reagoval slovy: - Celnik měl tedy štěstí!. Někdo jiný na to řekl: - Pašeraci měli tedy smůlu!. Jak se postavit k těmto projevům? Je oprávněné podezření, že je někdo udal? Jak se to dá řešit pomocí počtu pravděpodobnosti?

Při prověrce z češtiny jsou použity dva seznamy: seznam s spisovatelů a seznam s jejich citátů. Je třeba rozhodnout, který ze spisovatelů je autorem kterého z citátů. Za všechna správná spojení autora s jeho textem žák dostává pozitívní známku.
$s = 13$, $13! = 6\ 227\ 020\ 800$, $\frac{1}{13!} = \frac{1}{6\ 227\ 020\ 800}$.

V písemce ze zeměpisu žák dostal n otázek. Ke každé jsou připojeny dvě odpovedi *ano* nebo *ne* a žák má podtrhnout správnou. Pozitivní známku žák dostáva za podtrhnutí všech správných odpovědí.
$n = 20$, $2^{20} = 1\ 048\ 576$, $\frac{1}{2^{20}} \approx \ldots.$

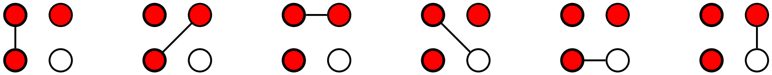
Moje prvni hodinky stochastiky ve škole

Zvu tě ke hře. Z urny se třemi koulemi, dvěma červenymi a jednou bílou, budou losovány současně dvě koule.
Pokud obě budou stejné barvy, vítězíš ty,
pokud však každá bude jiné barvy, vítězím já. Co na to říkaš?
Jak se rozhodneš?

Nebyl jsem gentelmenem, když jsem ti dával poslední nabídku. Mohu zachránit svou čest? Jakou kouli mám přidat, bílou nebo červenou, aby hra byla spravedlivá?

Přidánim bilé koule se nic nezměnilo. Hra pořád není spravedlivá. A dokonce jsoy tvoje šance stejně jako předtím dvakrát menší než moje! Je to překvapujíci skutečnost?

Při tažení dvou koulí z urny se třemi červenými koulemi a jednou bílou se setkáváme se zajímavou situací. Kolikrát jsou dvě vylosované koule stejné barvy, tolikrat jsou dvě koule, které zůstaly v urně (a to jsou také vylosované koule) různých barev, a opačně.

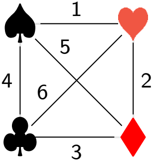


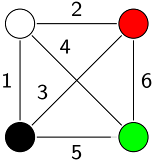
Z této ,,symetrie" vyplývá, že vylosování dvou koulí stejné barvy je stejně pravděpodobné jako vylosování dvou koulí různých barev.

Všimněme si, jak odlišné bývají w počtu pravděpodobnosti způsoby argumentace.

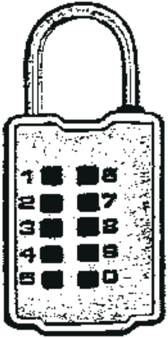
Před začátkem fotbalového zápasu rozhodčí hází mincí. Fotbalové utkání má za chvíli začít a zjistilo se, že rozhodčí nemá s sebou ani halíř. Co bys mohl navrhnout rozhodčímu v této situaci?

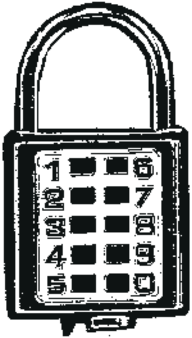
Chceš hrát ,,Člověče nezlob se". Ale ztratila se hrací kostka. Čím a jak nahradíš tuto kostku?

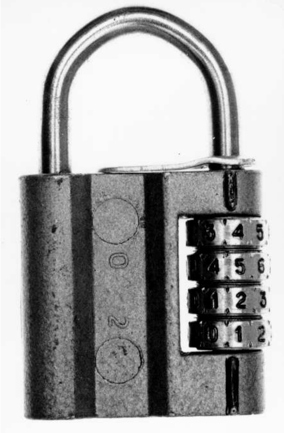


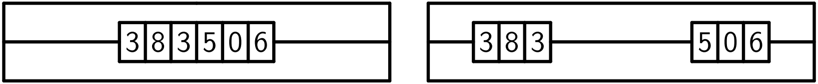


Pro otevření prvniho zámku je třeba stiskout čtyři z deseti knoflíků označených číslicemi od 0 do 9. Pořadí není důležité (jednotlivá tlačítka zůstávají po stisknutí ,,zamáčknutá"). Druhy zámek se otevíra, pokud stiskneme šest z deseti knofliků. Který z těchto dvou zámků lépe chrání před zloději?


1 6
2 7
3 8
4 9
5 0

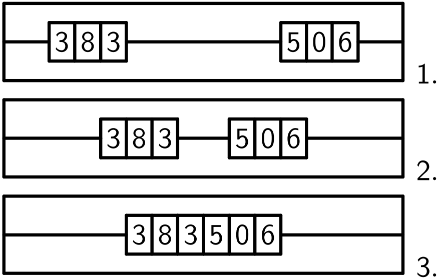

1 6
2 7
3 8
4 9
5 0


3 4 5
4 5 6
1 2 3
0 1 2



a) *b*)

Prvni aktovka se zamyka šifrou, která se skládá ze 6 číslic. Druha aktovka se zavírá dvěma zámky, ktere se otvírají současně. Šifra každého z nich se skládá ze 3 číslic. Pro každou z aktovek vypočítej riziko jejího otevřeni zlodějem při jednom pokusu. Ktera z těchto aktovek je lepši?



Rys. 5

Paradox společných narozenin

Nahodne se setkalo 50 osob. Zajímá nás, ve kterém dnu každá z nich slaví narozeniny. Předpokládejme (což je tady jistým zjednodušením), že rok ma 365 dnů (narozeni 29. února můžeme považovat za narození 1. března). Zda se, že je prakticky nemožne, aby mezi nimi byly alespoň dvě osoby, které slaví narozeniny ve stejný den.
Výklad ze stochastiky ve skupině 50 studentů tradičně začinám od sázky. Uzavírám sázku se studenty, a to takovou, že tvrdím, že jsou mezi nimi alespoň dvě osoby, které slaví narozeniny ve stejný den.
Studentům se zdá prakticky nemožne, abych tuto sázku vyhrál. Ale ještě nikdy jsem neprohral.
Jev, ktery se nam zda prakticky nemožny je prakticky jistý!

Děkuji za pozornost!