Čtyři body na kružnici

10. listopadu 2015

Problematika čtyř bodů na kružnici

- důkazové úlohy
- matematické soutěže
- nedostatečná metodika v učebnicích

Dostupné prostředky

- analytická geometrie
- syntetická geometrie
  - vlastnosti obvodových úhlů
  - mocnost bodu ke kružnici

Dostupné prostředky

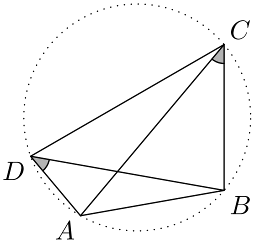
- analytická geometrie
- syntetická geometrie
    - vlastnosti obvodových úhlů
    - mocnost bodu ke kružnici

Vlastnosti obvodových úhlů

Věta 1

Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

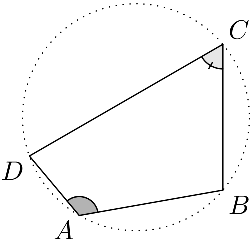
$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|.$$



Věta 2a

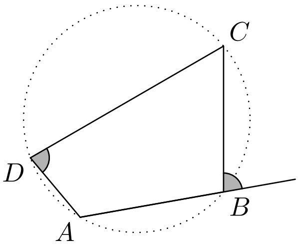
Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle CBA| = 180^\circ.$$



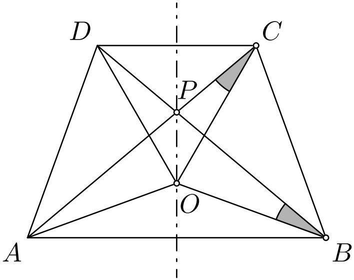
Věta 2b

Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když velikost vnitřního úhlu při kterémkoliv jeho vrcholu je shodná s velikostí vedlejšího úhlu u vrcholu protějšího.



Příklad 1

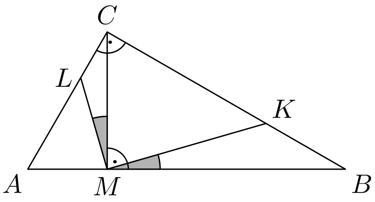
Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami AB a CD, P průsečík jeho úhlopříček a O střed kružnice jemu opsané. Dokažte, že body B, C, P, O leží na téže kružnici.



Příklad 2

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, bod M jako pata kolmice z vrcholu C na stranu c a body K, L ležící po řadě na stranách BC, CA, přičemž platí $2\,|BK| = |CK|$ a $2\,|CL| = |AL|$. Dokažte, že body K, C, L a M leží na téže kružnici.

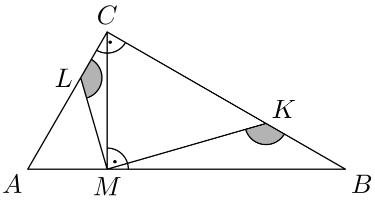
1. způsob:



Příklad 2

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, bod M jako pata kolmice z vrcholu C na stranu c a body K, L ležící po řadě na stranách BC, CA, přičemž platí $2|BK| = |CK|$ a $2|CL| = |AL|$. Dokažte, že body K, C, L a M leží na téže kružnici.

2. způsob:

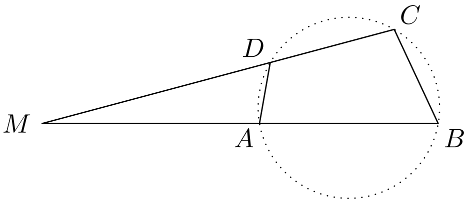


Mocnost bodu ke kružnici

Věta 3

Nechť je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a předpokládejme, že se přímky AB a CD protínají v bodě M. Čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

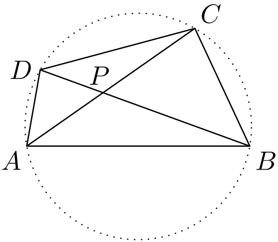
$$|MA| \cdot |MB| = |MD| \cdot |MC|.$$



Věta 4

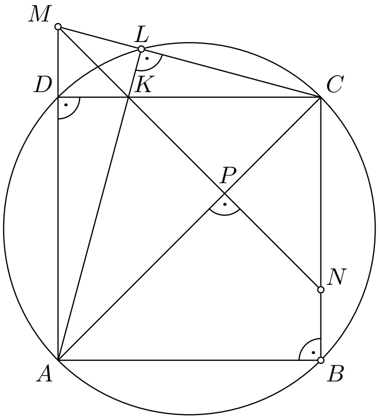
Nechť P je průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|.$$



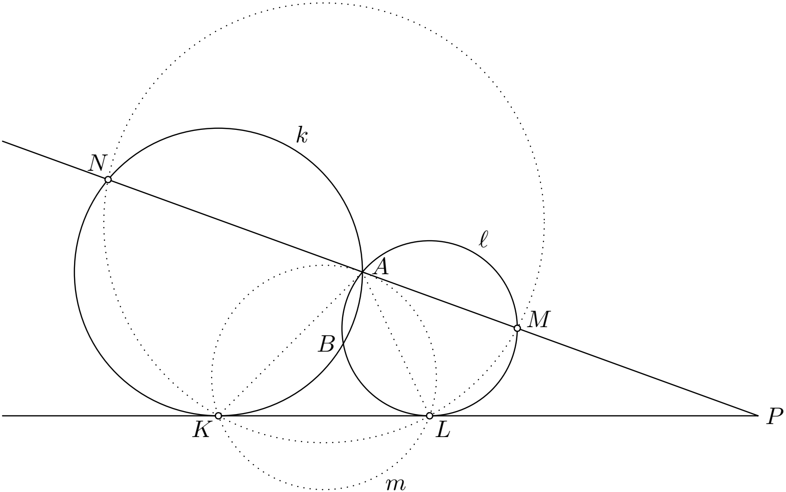
Příklad 3

Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku BC kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M a N leží na téže kružnici.



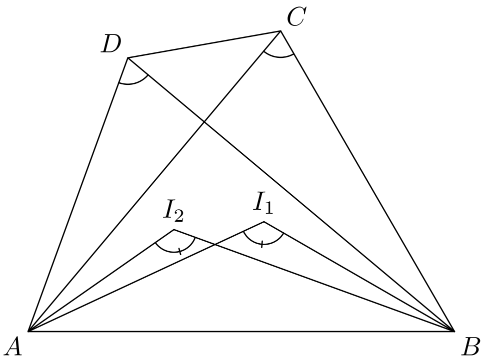
Příklad 4

Jsou dány kružnice k, ℓ, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a ℓ zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN a $MN \nparallel KL$. Dokažte, že pokud přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL, je čtyřúhelník $KLMN$ tětivový.


k
N
ℓ
A
M
B
K
L
P
m

Příklad 5

Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Nechť jsou I_1, I_2 středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům ABC a ABD. Dokažte, že také čtyřúhelník ABI_1I_2 je tětivový.



Děkuji za pozornost.

Literatura

- *Andreescu, T. – Rolínek, M. – Tkadlec, M.*: 107 Geometry Problems From the AwesomeMath Year-Round Program. Plano: XYZ Press, 2013.
- *Monk, D.*: New Problems in Euclidean Geometry. Leeds: United Kingdom of Mathematics Trust, 2009.
- *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia. Planimetrie. 4., upravené vydání. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy.
- *Ponarin, J. P.*: Elementarnaja geometrija. Tom 1: Planimetrija, preobrazovanija ploskosti (rusky). 1. vyd. Moskva: MCNMO, 2004.
- *Švrček, J.*: Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2014.
- *Švrček, J.*: Jak provádět důkazy v planimetrii? Olomouc, 2014. Shrnutí příspěvku k výjezdnímu soustřední matematických talentů, Karlov pod Pradědem, únor 2012.