Didaktický seminář

Astronomické počátky goniometrie

Zdeněk Halas

Katedra matematiky
Pedagogická fakulta Univerzity Palackého v Olomouci

Obsah

Slovo úvodem

Jak již sám název napovídá, tento text je věnován úplným počátkům disciplíny, kterou dnes nazýváme goniometrie. Text je rozdělen na dvě části.

První část obsahuje některé historicky významné postupy výpočtu hodnot „goniometrických funkcí“. Z matematického hlediska jim v antické matematice odpovídají délky tětiv, a tak se zaměřujeme na způsob jejich výpočtu v prvním komplexním dochovaném textu – v Ptolemaiově *Almagestu*.

V Ptolemaiových výpočtech se skrývá jedno omezení – délka tětivy příslušná jednomu stupni je pouze odhadnuta. Odhad je proveden s takovou přesností, že zcela vyhovuje pro vytvoření celé tabulky délek tětiv s přesností na dvě šedesátková místa.

Ve druhé části si pokládáme otázku, proč vlastně goniometrie vznikla – čím se lidé zabývali, že jim při řešení těchto problémů vyvstala potřeba matematického aparátu odpovídajícího dnešní goniometrii. Ukážeme, že jedním z klíčových problémů mohla být interpretace výsledků měření délky ročních období, která byla v průběhu staletí zpřesňována. Tato data byla v zásadním rozporu s jednoduchým aristotelovským modelem, kdy se nebeská tělesa měla pohybovat rovnoměrným kruhovým pohybem, přičemž středem této kruhové dráhy by byla Země. Řešení vyžadovalo geometrický model, jehož parametry bylo možno určit pouze s pomocí rozvinutého aparátu pro výpočet délek tětiv, což byl, jak jsme již zmínili, předchůdce dnešní goniometrie.

Přeji všem čtenářům tohoto textu, aby v něm nalezli inspiraci pro svou práci i potěšení z antické matematiky.

Část I
Výpočty hodnot goniometrických funkcí

1 Ptolemaiova goniometrie

Goniometrické funkce[1] hrály důležitou roli zejména v astronomii, jak uvidíme ve druhé části tohoto textu. Nejranější doklady jejich užívání v rozvinuté podobě zatím sahají do starověkého Řecka. Řekové používali místo našich goniometrických funkcí délku tětivy danou středovým úhlem o velikosti α. V našem textu ji budeme značit $\mathsf{crd}\,\alpha$, tj. platí

$$\mathsf{crd}\,\alpha = 2R\,\mathsf{sin}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Je pravděpodobné, že jako první sestavil tabulky významný řecký astronom Hipparchos (asi 180–125 př. Kr.). Jeho dílo se nám však dochovalo jen ve zlomcích, a tak jsme odkázáni pouze na pozdější svědectví.

Na Hipparcha vědomě navázal zejména Klaudios Ptolemaios, který Hipparcha mnohokrát zmiňuje a cituje. Z Ptolemaiova díla můžeme usuzovat, že Hipparchos tabulky hodnot $\mathsf{crd}\,\alpha$ opravdu potřeboval, používal je např. při studiu pohybu Měsíce a při dalších astronomických výpočtech.

Společně s přílivem astronomických poznatků ze starověké Mezopotámie se do Řecka dostalo používání šedesátkové soustavy. V Řecku se její náznaky objevily poprvé někdy v polovině třetího století v geografickém díle Eratosthena z Kyrény (276–194 př. Kr.). Toto dílo se nám nedochovalo, k dispozici máme pouze několik úryvků, zejména u Strabóna.

Nejvýznamnějším hellénistickým autorem, jehož astronomické dílo se nám dochovalo, je bezpochyby Klaudios Ptolemaios.

1.1 Klaudios Ptolemaios

O Klaudiovi Ptolemaiovi toho víme poměrně málo. Žil přibližně někdy mezi lety 90–165 a působil v Alexandrii. Podrobněji se lze o něm dočíst např. v [Št]. Byl to velmi plodný autor, jak je patrné ze stručného přehledu jeho díla.

- Almagest
- Kanopská poznámka – předběžné shrnutí parametrů Ptolemaiovy soustavy; cca 9 stran
- Tetrabiblos – astrologická příručka, zajistilo mu proslulost ve středověku

[1] Přesněji se jednalo o jejich předchůdce.

- Geografie – rozsáhlé dílo, obsahuje topografický popis a 27 map; (Súdéta oré: česko-německé pomezí, Ebúron: asi oblast jižně od Brna)
- Optika
- Planetární hypotézy – o vzdálenostech planet
- Příruční tabulky – pro výpočet poloh kosmických těles; obsahuje katalog 180 hvězd
- Fáze nehybných hvězd

Dnes je nejznámější jeho monumentální astronomické kompendium *Almagest* (řecky Μαθηματικὴ σύνταξις, *Mathématiké syntaxis*), jehož vydání [He] čítá 1 154 stran. Toto dílo mělo pro astronomii podobný význam, jako pro geometrii Eukleidovy *Základy*. Celá astronomie je zde budována na základě geocentrické soustavy.

Sám Ptolemaios své dílo nazývá *Mathématiké syntaxis*. Později však bylo také nazýváno *Megalé syntaxis* (Velká skladba, Μεγάλη σύνταξις). Arabští překladatelé tento název změnili na *Megisté syntaxis* (Největší skladba, Μεγίστη σύνταξις), což možná učinili z úcty k tomuto ohromnému dílu. Přepisem do arabštiny pak vzniklo *Al-Magisti*, což dále přešlo do latiny jako *Almagest*.

Pro zajímavost uvádíme zkrácenou verzi obsahu první ze třinácti knih *Almagestu*.

Obsah první knihy (z třinácti), jak je shrnut v jejím úvodu:

1. Předmluva.
2. O řazení vět.
3. Že se nebe pohybuje po sféře.
4. Že i Země jako celek je kulatá.
5. Že Země je středem nebe.
6. Že Země je vůči vesmíru jako bod.
7. Že se Země nepohybuje.
8. Že na nebi jsou dva druhy primárních pohybů.
9. O postupné výstavbě.
10. O délce tětiv v kružnici.
11. Tabulka tětiv v kružnici.
12. O oblouku mezi slunovraty.

13. Úvod pro sférické důkazy.

14. O obloucích mezi rovníkem a ekliptikou.

   ...

Vidíme, že Ptolemaios v úvodní kapitole vypracoval tabulky délek tětiv – jsou to nejstarší dochované tabulky tohoto typu. S největší pravděpodobností však nebudou první. Je téměř jisté, že Hipparchos (2. stol. př. Kr.) a Menelaos (1. stol. po Kr.) také používali podobné tabulky. Nejspíše tedy navazoval na práci dřívějších astronomů.

Idea tětivy pochází nejspíše od Hipparcha. Délky tětiv byly později nahrazeny polovičními délkami, což odpovídalo našemu sinu. Poprvé to máme doloženo u indického matematika Áryabhaṭy (499 po Kr.), jemuž se budeme věnovat později.

Z obsahu první knihy je patrné, že Ptolemaios neuvádí pouze tabulku, ale také podrobný návod na její sestavení.

1.2 Ptolemaiova goniometrie

V první knize Almagestu je vybudována rovinná goniometrie, a to včetně pečlivých důkazů. Celý postup slouží k výpočtu tabulky délek tětiv, kterou Ptolemaios uvádí s krokem půl stupně. Tato tabulka slouží v ostatních kapitolách jako pomocný aparát pro astronomické výpočty.

Jak už bylo zmíněno, Ptolemaios pracuje s délkami tětiv na rozdíl od našich sinů. Samotnou kružnici dělí na 360 stejných úseků, její průměr na 120 úseků.[2]

Délku tětivy dané středovým úhlem o velikosti α budeme značit $\mathsf{crd}\,\alpha$. Náš sinus je vlastně polovinou délky tětivy příslušející dvojnásobnému úhlu vydělenou poloměrem, platí tedy vztah

$$\mathsf{crd}\,\alpha = 2R\,\mathsf{sin}\,\frac{\alpha}{2}\,,$$

kde R je v našem případě rovno 60.

Všechny výpočty jsou v *Almagestu* prováděny přímo v poziční šedesátkové soustavě. Ptolemaios systematicky pracuje s přesností na dvě šedesátková místa, takže může uvádět vždy pouhá tři čísla oddělená mezerou bez dalšího označení, a přesto nemůže dojít k žádnému nedorozumění. Tento původní způsob zápisu zachováváme. Například údaj 70 32 3 znamená $70 + \frac{32}{60} + \frac{3}{60^2}$. V případě, že by na některé pozici měla být nula, píše Ptolemaios malý kroužek, který je patrný i na přiložené ukázce. Tento kroužek však nelze považovat za právoplatného předchůdce nuly, neboť slouží výhradně k označení „prázdné“ pozice v šedesátkovém zápisu.

[2] Tyto úseky samozřejmě neodpovídají úsekům, na něž je rozdělena samotná kružnice, jejíž členění odpovídá dnešnímu dělení plného úhlu na 360°. Pro názornost se budeme proto u údajů, které se váží k členění kružnice, držet současného označení; místo pouhého čísla 60 tak budeme psát 60°. Používání členění na 360 a 120 úseků je dědictvím mezopotámské astronomie, podobně jako počítání v šedesátkové soustavě.

Transformace Ptolemaiových údajů do současného označení tedy probíhá následujícím způsobem. Vezmeme-li si například rovnost

$$\mathsf{crd}\, 72^\circ = 70\ 32\ 3\,,$$

tak pro nás znamená na levé straně:

$$\mathsf{crd}\, 72^\circ = 120 \cdot \sin 36^\circ = 120 \cdot 0,587\,785\,252 \cdots = 70,534\,230\,275 \ldots$$

a na straně pravé (přesnost je omezena na dvě šedesátková místa):

$$70\ \ 32\ \ 3 = 70 + \frac{32}{60} + \frac{3}{60^2} = 70,534\,166 \ldots\ .$$

Jelikož má strana pravidelného šestiúhelníku (středový úhel 60°) stejnou délku jako poloměr kružnice jemu opsané ($R = 60$), dostáváme základní poznatek, z něhož Ptolemaios vychází:

$$\mathsf{crd}\, 60^\circ = 60\,.$$

Při tomto označení a za těchto předpokladů odvozuje několik vět, které jsou teoretickým základem výpočtu tabulky délek tětiv příslušných středovým úhlům o velikostech od 0° do 180° s krokem $\frac{1}{2}^\circ$. Tato tabulka je také součástí Almagestu, ukázka z ní je na obrázku níže.

Celé budování teoretického aparátu, na němž je tvorba tabulky délek tětiv založena, je rozděleno do šesti kroků.

1. Určí se hodnota $\mathsf{crd}\, 72^\circ$ a $\mathsf{crd}\, 36^\circ$. Z geometrické konstrukce pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku a užitím Pýthagorovy věty se dostane

$$\mathsf{crd}\, 72^\circ = 70\ 32\ 3 \qquad \mathsf{crd}\, 36^\circ = 37\ 4\ 55.$$

2. Ptolemaiova věta – základ pro odvození součtového vzorce $\mathsf{crd}\,(\alpha + \beta)$.
   Pro libovolný tětivový čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|\,.$$

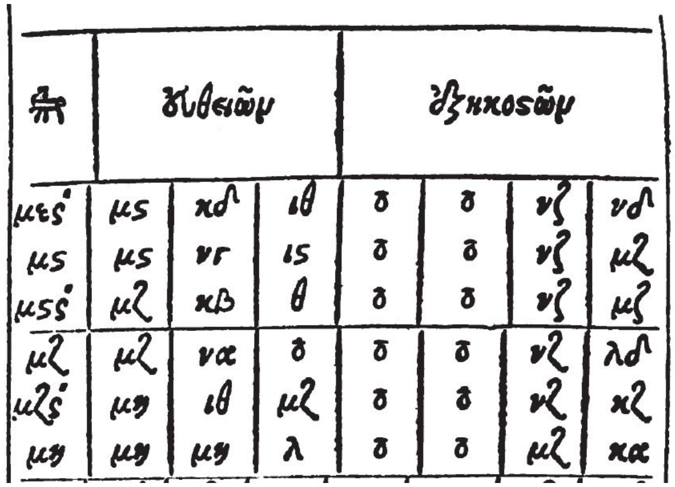
3. Vztah pro $\mathsf{crd}\,(\alpha - \beta)$ – lze tedy odvodit $\mathsf{crd}\, 12^\circ = \mathsf{crd}\,(72^\circ - 60^\circ)$.

4. Vztah pro $\mathsf{crd}\, \frac{\alpha}{2}$ – odtud se odvodí $\mathsf{crd}\, 6^\circ$, $\mathsf{crd}\, 3^\circ$, $\mathsf{crd}\, \frac{3}{2}^\circ$ a $\mathsf{crd}\, \frac{3}{4}^\circ$.

5. Odhad pro $\mathsf{crd}\, 1^\circ$, odtud pak $\mathsf{crd}\, \frac{1}{2}^\circ$:

$$\mathsf{crd}\, 1^\circ = 1\ 2\ 50 \qquad \mathsf{crd}\, \frac{1}{2}^\circ = 0\ 31\ 25$$

6. Sestavení tabulky s krokem $\frac{1}{2}^\circ$ s pomocí odvozených vztahů.



περιφερειῶν	εὐθειῶν			ἑξηκοστῶν			
με∠'	μς	κδ	ιθ	ο	ο	νζ	νδ
μς	μς	νγ	ις	ο	ο	νζ	μζ
μς∠'	μζ	κβ	θ	ο	ο	νζ	μζ
μζ	μζ	να	ο	ο	ο	νζ	λδ
μζ∠'	μη	ιθ	μζ	ο	ο	νζ	κζ
μη	μη	μη	λ	ο	ο	μζ	κα

Ukázka z Ptolemaiovy tabulky, vydání [Gr] z roku 1538.

1.3 Význam součtových vzorců

V této podkapitole rozvedeme jednotlivé kroky Ptolemaiovy vedoucí k sestavení tabulky délek tětiv. Celá konstrukce je poměrně přehledná. Nejprve vypočteme stranu pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku, čímž získáme hodnoty $\operatorname{crd} 72^\circ$ a $\operatorname{crd} 36^\circ$. Následně odvodíme Ptolemaiovu větu, která vlastně (moderně řečeno) vystupuje v roli součtového vzorce pro funkci $\operatorname{crd}\alpha$. Odtud pak odvodíme modifikaci tohoto „součtového vzorce" pro $\operatorname{crd}(\alpha-\beta)$ a $\operatorname{crd}\frac{\alpha}{2}$. Tyto vztahy už pak umožňují vhodnou kombinací známých hodnot dopočítat velké množství hodnot jiných, jak je uvedeno v přehledu výše.

Jednotlivé kroky Ptolemaiova postupu budeme prezentovat v modernizované a upravené podobě, abychom usnadnili jeho transformaci do současné školské matematiky.

Než se podíváme na samotný Ptolemaiův postup, učiníme k němu několik poznámek z hlediska současné školské matematiky. Z výše uvedených shrnutí je zřejmé, že jeho jádrem jsou součtové vzorce pro funkce sinus a kosinus (u délky tětivy přitom postačuje součtový vzorec jediný). Stačí znát alespoň jednu hodnotu a všechny ostatní pak lze pomocí součtových vzorců dopočítat.

Je-li možno na základě jedné hodnoty dopočítat s pomocí součtových vzorců všechny hodnoty funkcí sinus a kosinus, jsou tak vlastně jednoznačně zadány a součtové vzorce lze vzít za základ jejich definice. Teoretickým základem je k tomu následující věta.

Věta. *Existuje právě jedna dvojice funkcí $s(x)$ a $c(x)$, které splňují na celém $\mathbb{R}$ soustavu funkcionálních rovnic*

$$s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)\,,$$
$$c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y)$$

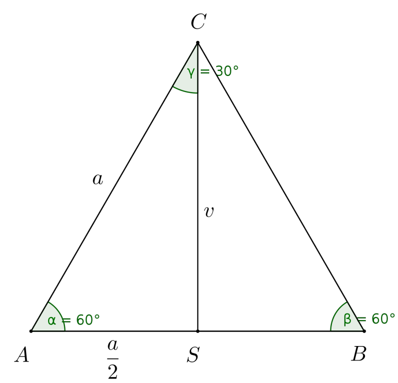
a podmínku

$$\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1\,.$$

Poslední podmínka (limita) je nutná kvůli spojitosti a výběru jediné funkce s „se sklonem 45° v bodě nula“.

Pokud jsou součtové vzorce odvozovány izolovaně, bez upozornění na jejich ohromný potenciál pro výpočet dalších hodnot, tak se ztrácí něco podstatného z jejich matematické podstaty.

Ve školské matematice se většinou odvozují hodnoty sinu a kosinu úhlů velikosti $30°, 45°, 60°$. V případě 30° a 60° je základem je rovnostranný trojúhelník ABC.



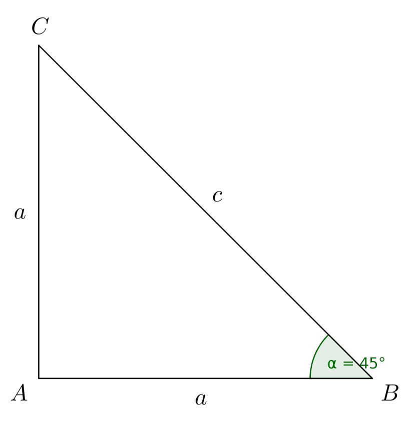
Odtud přímo můžeme psát:

$$\cos\alpha = \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\gamma = \sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\sin\alpha = \sin 60^\circ = \frac{v}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\gamma = \cos 30^\circ = \frac{v}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

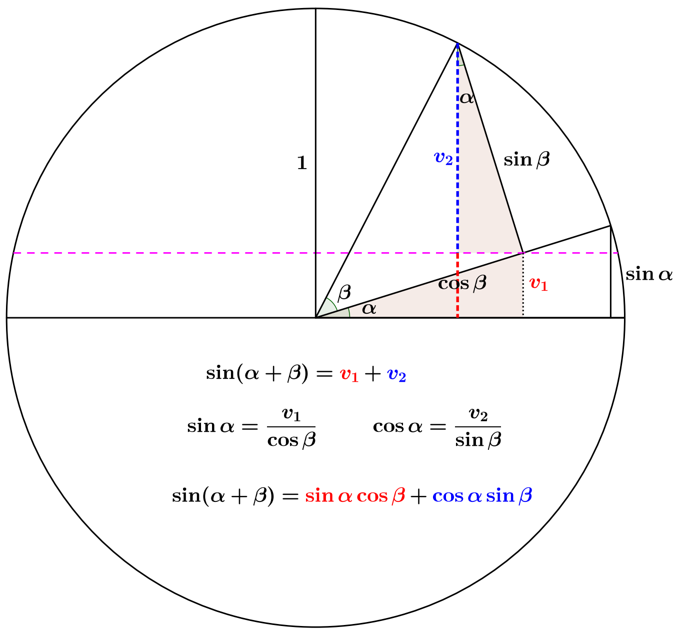
Podobně na základě pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníka

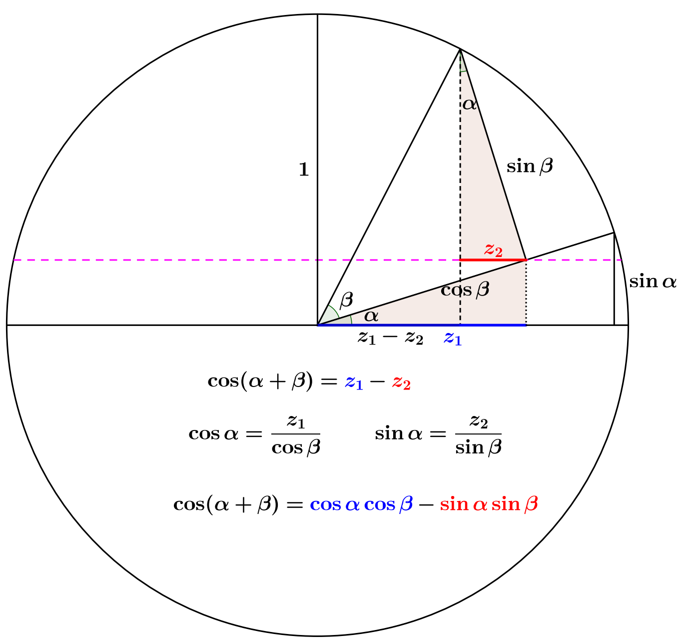


ihned dostáváme:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Samotné odvození součtového vzorce pro funkci sinus a kosinus je zřejmé z následujících obrázků.

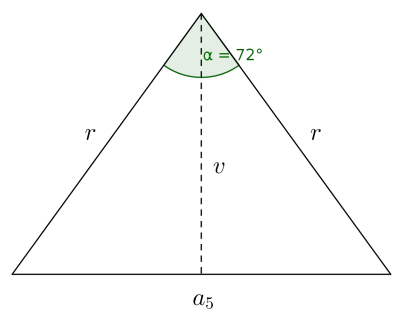




1.4 Konstrukce tabulky délek tětiv

1.4.1 Pravidelný pětiúhelník a desetiúhelník

Nyní vypočteme délku strany a_5 pravidelného pětiúhelníku, abychom získali hodnotu $\mathsf{crd}\,72°$. S použitím dnešní goniometrie by se jednalo o snadný úkol, stačilo by vhodným způsobem použít funkci sinus v trojúhelníku, jehož vrcholy tvoří dva sousední vrcholy pravidelného pětiúhelníku a střed kružnice opsané:

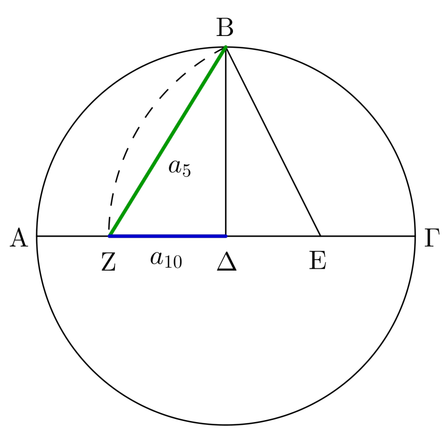


$$\sin 36° = \frac{\frac{a_5}{2}}{r}\,,$$

tj.

$$a_5 = 2r \sin 36°\,.$$

Chceme-li však určit délku strany pravidelného pětiúhelníku pouze s pomocí elementární geometrie, budeme muset vyjít z jeho konstrukce. Ta je běžnou součástí školské matematiky, zaznamenánu ji máme nejen v *Almagestu*, ale také ve větě IV,11 Eukleidových *Základů*.



Uvažujme kružnici se středem Δ a o poloměru ΔΓ, jehož střed označme E. Bod Z zkonstruujme tak, aby ležel na průměru AΓ a zároveň EZ = EB. Potom úsečka ΔZ má délku rovnou straně pravidelného desetiúhelníku a BZ pravidelného pětiúhelníku.

Označíme-li poloměr kružnice r, dostaneme z Pýthagorovy věty aplikované na trojúhelník BΔE

$$\mathrm{EB} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = r\,\frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

Odtud potom plyne

$$r\,\frac{\sqrt{5}}{2} = \mathrm{EB} = \mathrm{EZ} = a_{10} + \frac{r}{2}\,,$$

tj.

$$a_{10} = r\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,.$$

Opět z Pýthagorovy věty aplikované na trojúhelník BΔZ obdržíme vztah

$$a_5^2 = a_{10}^2 + r^2 = r^2\left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 1\right] = r^2\,\frac{5-2\sqrt{5}+1+4}{4} = r^2\,\frac{5-\sqrt{5}}{2}\,,$$

tedy

$$a_5 = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\,.$$

Pro $r = 60$ dostaneme[3]

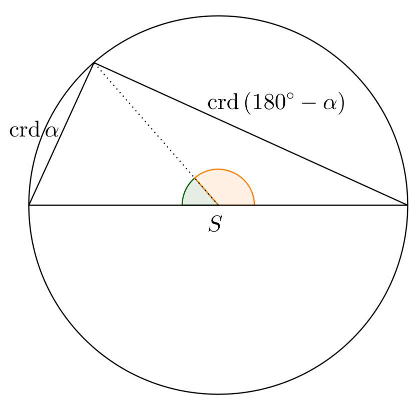
$$\mathsf{crd}\,72^\circ = 70{,}534\,230\cdots \approx 70\;32\;3\,.$$

Z Thalétovy věty plyne, že trojúhelník nad přeponou je pravoúhlý. Platí v něm tedy Pýthagorova věta

$$\mathsf{crd}^{\,2}\alpha + \mathsf{crd}^{\,2}(180^\circ - \alpha) = 120^2\,.$$

Ke každé hodnotě $\mathsf{crd}\,\alpha$ lze tedy dopočítat hodnotu komplementární:

$$\mathsf{crd}\,(180^\circ - \alpha) = \sqrt{120^2 - \mathsf{crd}^{\,2}\alpha}\,.$$



[3] Z pohledu současné goniometrie jsme vypočetli hodnotu $\sin 36^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$.

1.4.2 Ptolemaiova věta

Jelikož známe hodnotu $\mathsf{crd}\,60^\circ = 60$, budeme moci vypočíst $\mathsf{crd}\,(72^\circ - 60^\circ) = \mathsf{crd}\,12^\circ$.[4] K tomu však potřebujeme odvodit vztah, který by zastoupil roli dnešních součtových vzorců – Ptolemaiovu větu[5].

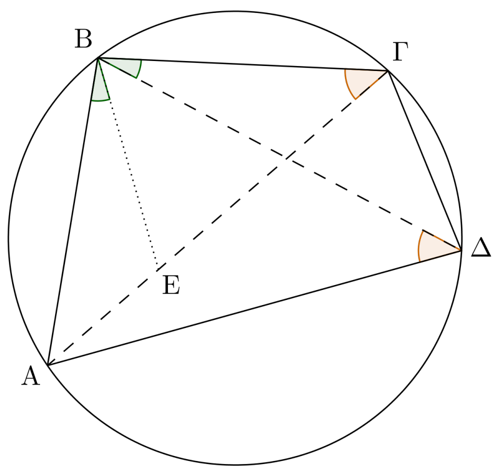
Věta (Ptolemaiova). *V každém tětivovém čtyřúhelníku* $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ *platí:*

$$\mathrm{AB} \cdot \mathrm{\Gamma\Delta} + \mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta}\,,$$

neboli

$$ac + bd = ef\,,$$

kde a, b, c, d jsou postupně délky jeho stran a e, f délky úhlopříček.



Sestrojme na úhlopříčce $\mathrm{A\Gamma}$ bod E tak, aby byl úhel ABE roven úhlu $\mathrm{\Delta B\Gamma}$ (označeny zeleně). Také oranžově označené úhly jsou si rovny, neboť se jedná o obvodové úhly příslušné témuž oblouku. Trojúhelníky $\mathrm{EB\Gamma}$ a $\mathrm{AB\Delta}$ jsou tedy podobné, tj.

$$\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{E\Gamma}} = \frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{A\Delta}}\,,$$

neboli

$$\mathrm{A\Delta} \cdot \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{E\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta}\,.$$

Také trojúhelníky ABE a $\mathrm{\Delta B\Gamma}$ jsou podobné (úhly BAE a $\mathrm{B\Delta\Gamma}$ příslušejí témuž oblouku $\mathrm{B\Gamma}$), získáme tedy rovnost

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{EA}} = \frac{\mathrm{\Delta B}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}\,,$$

[4] Jazykem dnešní goniometrie se jedná o výpočet $\sin(36^\circ - 30^\circ) = \sin 6^\circ$.

[5] Sám Ptolemaios tuto větu označuje jako „velmi užitečné lemmátko“ (λημμάτιον εὔχρηστον πάνυ), neboť v jeho konstrukci plní spíše funkci pomocnou.

neboli

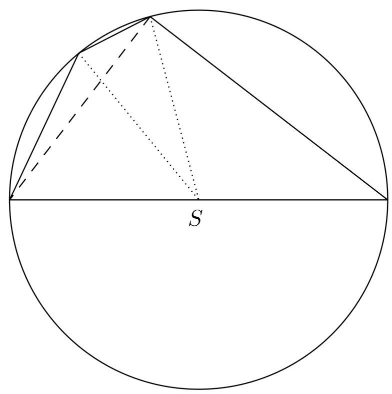
$$\mathrm{AB} \cdot \Gamma\Delta = \mathrm{EA} \cdot \Delta\mathrm{B} \,.$$

Součtem obou výsledných nerovností získáme

$$\mathrm{AB} \cdot \Gamma\Delta + \mathrm{A}\Delta \cdot \mathrm{B}\Gamma = (\mathrm{AE} + \mathrm{E}\Gamma) \cdot \mathrm{B}\Delta = \mathrm{A}\Gamma \cdot \mathrm{B}\Delta \,,$$

což je tvrzení věty. □

Aplikaci Ptolemaiovy věty ilustruje následující obrázek.



1.4.3 Tětiva odpovídající jednomu stupni

Nalezení odhadu pro $\mathsf{crd}\, 1^\circ$ je z historického i matematického hlediska velmi významné. Viděli jsme, že z odvozené hodnoty $\mathsf{crd}\, 12^\circ$ lze pomocí formule pro $\mathsf{crd}\, \frac{\alpha}{2}$ získat $\mathsf{crd}\, \frac{3}{2}^\circ$ a $\mathsf{crd}\, \frac{3}{4}^\circ$, ne však $\mathsf{crd}\, 1^\circ$. Bylo by potřeba provést trisekci úhlu, a tak Ptolemaios hledá raději dostatečně dobrou aproximaci.

Základem hledání dolního a horního odhadu je nerovnost (platí pro $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$)

$$\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\mathsf{crd}\, \alpha}{\mathsf{crd}\, \beta} > \frac{\alpha}{\beta} \,,$$

která byla v té době známa, používali ji například Aristarchos, Eukleidés či Archimédés. Lze ji přepsat ve tvaru

$$\alpha < \beta \Rightarrow \frac{\mathsf{crd}\, \alpha}{\alpha} > \frac{\mathsf{crd}\, \beta}{\beta} \,. \tag{1}$$

Nerovnost (1) je poměrně názorná; říká, že se větší oblouk od příslušné tětivy liší více, než je tomu u menšího oblouku. S použitím (1) dostaneme

$$\frac{\mathsf{crd}\, \frac{3}{2}^\circ}{\frac{3}{2}} < \frac{\mathsf{crd}\, 1^\circ}{1} < \frac{\mathsf{crd}\, \frac{3}{4}^\circ}{\frac{3}{4}} \,.$$

Dosazením známých hodnot $\mathsf{crd}\,\frac{3}{2}^\circ = 1\;34\;15$ a $\mathsf{crd}\,\frac{3}{4}^\circ = 0\;47\;8$ dostaneme

$$1\;34\;15 \cdot \frac{2}{3} < \frac{\mathsf{crd}\,1^\circ}{1} < 0\;47\;8 \cdot \frac{4}{3},$$

$$1\;2\;50 < \frac{\mathsf{crd}\,1^\circ}{1} < 1\;2\;50\frac{2}{3},$$

kde je rozdíl mezi horním a dolním odhadem $\mathsf{crd}\,1^\circ$ tak malý, že při zvolené přesnosti na dvě šedesátinná místa ihned dostáváme $\mathsf{crd}\,1^\circ = 1\;2\;50$.[6]

1.4.4 Poslední sloupec v Ptolemaiově tabulce

V Ptolemaiových tabulkách je uveden ještě jeden (třetí) sloupec, který obsahuje interpolační údaje, konkrétně hodnoty

$$\frac{\mathsf{crd}\,(\alpha + \frac{1}{2}) - \mathsf{crd}\,\alpha}{30}.$$

Rozdíly délek tětiv sousedících v tabulce jsou vyděleny 30, přičemž tyto sousední tětivy příslušejí úhlům lišícím se velikostí o půl stupně; jedna třicetina tedy odpovídá naší jedné minutě. Pro zajímavost poznamenejme, že dělení třiceti je v šedesátkové soustavě jednoduché; provede se vynásobením dvěma a posunutím řádové čárky o jedno místo doleva.

Tento interpolační údaj tedy umožňuje alespoň přibližně rozšířit tabulky na hodnoty počítané s krokem 1 minuta. Potřebujeme-li například hodnotu $\mathsf{crd}\,7^\circ\,40'$, nalezneme v tabulkách $\mathsf{crd}\,7^\circ\,30'$ a interpolační údaj – jednu třicetinu rozdílu $\mathsf{crd}\,8^\circ - \mathsf{crd}\,7^\circ\,30'$. Tento údaj vynásobíme deseti a přičteme k $\mathsf{crd}\,7^\circ\,30'$, čímž dostaneme pomocí lineární interpolace přibližnou hodnotu $\mathsf{crd}\,7^\circ\,40'$.

2 Názvy goniometrických funkcí

Přestože je tětiva geometricky názorná, v astronomických výpočtech se většinou uplatňovala polovina délky tětivy. První doklad jejího tabelování máme doložen u významného a hojně komentovaného indického astronoma a matematika Áryabhaṭy[7] (476–550), který nazývá polovinu tětivy *ardha-jya* (nebo zkrácené *jya*), což znamená „polovina tětivy luku“. Tento standardní termín staré indické matematiky pak arabští matematikové přepsali při překladu indických děl do arabštiny jako *jiba* (psáno bez samohlásek *jb*), což však nemá v

[6] $1\;2\;50 = 1 + \frac{2}{60} + \frac{50}{3600} = 1,047222\ldots$, přičemž $\mathsf{crd}\,1^\circ = 2 \cdot 60 \cdot \sin\frac{1}{2}^\circ = 1,047184\ldots$.

[7] Áryabhaṭa patřil mezi velmi významné indické učence. Určil například obvod Země s udivující přesností – jeho údaj je jen o přibližně 100 km menší než současná hodnota. Uvádí také hodnotu $\pi = 3,1416$. Věděl, že to není přesná hodnota (zmiňuje, že se „blíží“); často se mu tak připisuje, že věděl o iracionalitě π, což však není v kontextu indické vědy zcela korektní. Áryabhaṭu dále citují význační arabští matematikové, např. al-Chwárizmí, který jeho dílo *Áryabhaṭía* přeložil kol. roku 820 do arabštiny, což také sehrálo důležitou úlohu na cestě arabských číslic do Evropy.

arabštině žádný význam. Pozdější autoři to tedy začali někdy v 9. století nahrazovat slovem *jaib* („záliv, zátoka“). Když pak ve 12. stol. překládali Robertus Castrensis (Robert z Chesteru, 1145) a Gherardo z Cremony (1175) tyto spisy do latiny, nahradili arabské *jaib* doslovně latinským ekvivalentem *sinus* („záhyb, oblouk, záliv“).

Název pro kosinus (vlastně zkratka pro latinské *complementarii anguli sinus*, tj. „sinus doplňkového úhlu“) zavedl spolu s názvem kotangens roku 1620 anglický astronom a matematik Edmund Günther (1581–1626) ve svém spisu *Canon Triangulorum*.

Dnes poměrně opomíjený kotangens (opět zkratka pro latinské *complementarii anguli sinus*, tj. „tangens doplňkového úhlu“) se objevil dříve než tangens, v arabské matematice jej zavedl v 9. stol. al-Battání. V Evropě jej znovuobjevil anglický matematik Thomas Bradwardin (1290–1349).

Část II
Astronomické počátky goniometrie

V této části si ukážeme, jak pozorování nestejné délky ročních období vedlo k vytvoření modelů, jejichž matematické zpracování si vyžádalo vznik nové matematické disciplíny – goniometrie.

3 Počátky goniometrie a pozorování délky ročních období

Zmínku o prvním pozorování nestejné délky ročních období lze nalézt v Simplikiově komentáři k Aristotelovi[8], kde se píše o Metónovi a Euktémonovi[9], kteří už někdy kolem roku 430 př. Kr. věděli o tom, že se doby mezi slunovraty a rovnodennostmi liší. Přehled antických pozorování nestejné délky ročních období nacházíme na jednom papyru známém pod názvem *Eudoxī Ars Astronomica*[10]:

	Jaro	Léto	Podzim	Zima	Rok
Eudoxos	91?	91?	92	91	asi 360 př. Kr.
Démokritos	?	–	91	91	asi 400 př. Kr.
Euktémón	tj. 93	90	90	92	asi 430 př. Kr.
Kallippos	tj. 94	92	89	90	asi 330 př. Kr.

Z tabulky shrnující tato pozorování je vidět, že Euktémonovo pozorování sice nebylo úplně přesné, přesto však ukázalo, že jaro[11] je nejdelším ročním obdobím. O pozorování Démokritově nemáme záznam úplný. Překvapující je, že vynikající matematik a astronom Eudoxos z Knidu pravděpodobně považoval rozdíly v délce jednotlivých ročních období za

[8] I. L. Heiberg, *Simplicii In Aristotelis De caelo, Commentaria.* Berolini, 1894. Na straně 497, řádek 19 se nachází citát z Eudéma, který se zmiňuje o Metónovi a Euktémonovi.

[9] Metón a Euktémón jsou někdy považováni za zakladatele vědecké astronomie, a to díky pozorování letního slunovratu, které provedli v Athénách roku 432 př. Kr. Jedná se o první datované pozorování v antice.

[10] Vydal jej Fr. Blass roku 1887. Tento papyrus byl napsán v Egyptě mezi lety 193 a 165 př. Kr. Jedná se pravděpodobně o zápisky z přednášek. Ke konci tohoto papyru (sloupce 22 a 23) se nachází údaje o nestejných délkách jednotlivých ročních období u různých autorů. Pak už jen následuje seznam znamení zvěrokruhu a závěrečné poznámky, mezi nimiž si pisatel zaznamenal i pobídku přednášejícího k pilnému studiu, jež má studentům zajistit lepší život: *Namáhejte se, pánové, abyste pak nemuseli žít v námaze.*

[11] Dodejme pro úplnost, že délky ročních období se postupem času pomalu mění; dnes je nejdelším ročním obdobím léto.

chybu měření a rozdělil rok na čtyři stejné díly (podzimu formálně přidal jeden den, aby získal počet 365). Mnohem přesnější pozorování provedl sto let po Euktémonovi Kallippos.

Slavný astronom Hipparchos provedl někdy před rokem 130 př. Kr. vlastní pozorování, která byla velmi přesná:

$$\text{jaro} \quad 94\tfrac{1}{2} \qquad \text{léto} \quad 92\tfrac{1}{2} \qquad \text{podzim} \quad 88\tfrac{1}{8} \qquad \text{zima} \quad 90\tfrac{1}{8}\ .$$

Tyto výsledky potvrdil Klaudios Ptolemaios[12] kolem roku 150 po Kr. svým vlastním přesným měřením, při němž odhalil nepatrnou nepřesnost umístění velkého bronzového prstence sloužícího k určování rovnodennosti, který byl umístěn v alexandrijské palaistře. V Ptolemaiově astronomickém kompendiu *Almagest* se nachází rozsáhlá citace Hipparchových výsledků měření a popis modelu, který Hipparchos na základě těchto výsledků vytvořil. Právě v matematickém popisu tohoto modelu nacházíme snad vůbec první použití „goniometrie“. Podobných aplikací pak nacházíme v antické astronomii celou řadu, přičemž právě takovéto astronomické výpočty byly motivem pro vytvoření celého nového odvětví matematiky, které dnes nazýváme goniometrie.

3.1 Volba modelu pohybu Slunce

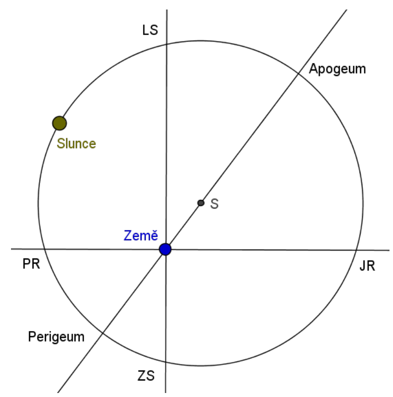
Stále přesnější pozorování nestejných délek ročních období vedla k potřebě upravit nejjednodušší model pohybu Slunce: pohyb konstantní rychlostí po kružnici, v jejímž středu je Země. Jelikož bylo pro antického člověka těžké si představit, co by Slunce přimělo při svém oběhu snižovat a zvyšovat svou rychlost, případně co by jej mohlo vychýlit z kruhové dráhy, byly nové modely zaměřeny na modifikaci volby středu rovnoměrného kruhového pohybu. Vznikly tak dva modely, o nichž později Apollónios z Pergé kolem roku 200 př. Kr. čistě geometrickou cestou dokázal, že jsou ekvivalentní.

Dva modely pohybu nebeských těles: 1) deferent a epicykl; 2) excentr.

[12] Alexandrijský astronom, autor velkého astronomického kompendia *Almagest* o 13 kapitolách, v němž shrnul, doplnil a systematizoval výsledky práce předchozích generací astronomů. Zdaleka nejvíce navazuje na Hipparcha. O Hipparchových výsledcích ohledně nestejných délek ročních období se dozvídáme právě díky tomu, že je Ptolemaios obsáhle cituje ve svém *Almagestu;* Hipparchově pozorování a teoretickému modelu věnuje kapitolu III.4., viz [T1].

První model, který vznikl nejspíše při popisu pohybu planet[13], ponechal ve středu velké kružnice (tzv. *deferent*) Zemi, po ní se však pohybovala svým středem jiná menší kružnice (tzv. *epicykl*), po níž teprve obíhalo jednou za rok Slunce. Jednalo se tedy o složení dvou rovnoměrných kruhových pohybů.

Druhý model byl založen na posunu středu kruhového pohybu. Slunce se tak pohybovalo konstantní rychlostí po kruhové dráze (nazývané *excentr*), která však měla střed mimo Zemi. Tento střed bylo potřeba nalézt tak, aby byl v souhlasu s pozorovanými údaji. Právě tento model si pro matematickou jednoduchost Hipparchos vybral. Navíc argumentoval tím, že nepovažuje za rozumné popisovat pohyb Slunce pomocí složení dvou pohybů, je-li jej možné popsat pomocí jediného rovnoměrného kruhového pohybu.



3.2 Hledání středu excentru

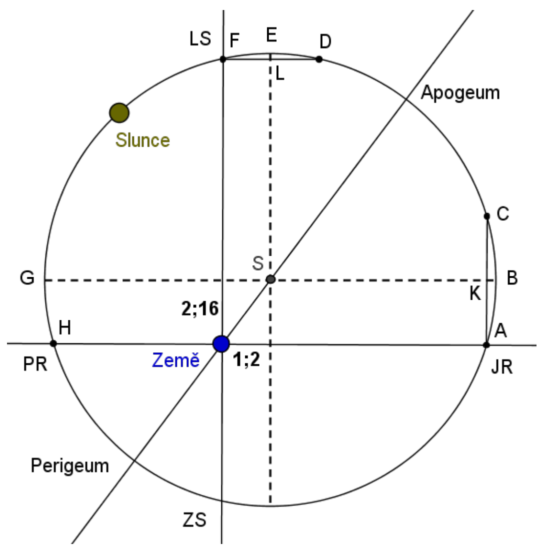
Nalezení středu excentru a jeho vzdálenosti od Země bylo problémem, který se Hipparchovi podařilo vyřešit pouze s využitím tehdy nově vzniklého odvětví matematiky, jež se zabývalo určováním délek tětiv odpovídajících příslušným středovým úhlům (značíme $\mathsf{crd}\,\alpha$, z řec. *chordé,* struna ze střeva). Hipparchos dokonce sestavil jejich tabulku. Ta je první tabulkou, jež přesně odpovídá dnešním tabulkám funkce sinus. Připomeňme, že sinus je vlastně polovinou délky tětivy (v jednotkové kružnici), délka tětivy $\mathsf{crd}\,\alpha$ v jednotkové kružnici je tedy

$$\mathsf{crd}\,\alpha = 2\,\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

[13] Řekové je nazývali *planétes asteres* (toulající se hvězdy) díky tomu, že při pozorování ze Země vykazovaly opravdu podivné chování: při svém kruhovém pohybu se občas zastavily a nějakou dobu se pohybovaly opačným směrem (tzv. *retrográdní pohyb*), poté opět pokračovaly ve své dráze. Přesnější pozorování ukázala, že planety při svém pohybu opisují různě veliké smyčky. Popis těchto pohybů bylo možno uspokojivě modelovat složením rovnoměrných kruhových pohybů. Těch však se stále přesnějšími pozorováními přibývalo; právě těmito korekcemi nabyl tento model takové složitosti, že astronomové začali hledat uspokojivější vysvětlení. Postupem času se ukázalo, že Koperníkův heliocentrický přístup a Keplerova elipsa byly dobrým východiskem z krize středověké astronomie.

Vzhledem k této jednoznačné korespondenci můžeme Hipparchovy výpočty pomocí délek tětiv snadno přeformulovat do moderní podoby pomocí dnešní funkce sinus. Celý výpočet uvedeme ve zjednodušené a modernizované podobě, přičemž budeme používat dnešní symboliku, aby se v komplikovaných antických způsobech zápisu neztratila přímá a jednoduchá aplikace sinu. V průběhu výpočtu také uvidíme, proč začala indická a arabská astronomie později místo délky tětivy používat její polovinu, což vedlo přímo k zavedení dnešního sinu (a ostatních goniometrických funkcí).

Celou dráhu Slunce v průběhu roku Hipparchos rozdělil mezníky jednotlivých ročních období: jarní a podzimní rovnodennost (JR a PR), letní a zimní slunovrat (LS a ZS). Tuto dráhu budeme považovat za kružnici o poloměru 60 (dědictví babylónské astronomie). Cílem je najít délky úseček AK a LF, čímž získáme polohu Země vůči středu excentru.



Přepočítáme-li délku trvání jara (94,5 dne, tj. 94,5 dílů z 365) na stupně, obdržíme 94,5 dne $\sim \widehat{AF} \sim 93°9'$, pro léto potom 92,5 dne $\sim \widehat{FH} \sim 91°11'$.

Celkem má tedy úhel odpovídající oblouku $\widehat{AFH}$ od jarní po podzimní rovnodennost velikost $\widehat{AFH} \sim 184°20'$, přímý úhel tak přesahuje o $4°20'$, čemuž odpovídá součet délek oblouků $\widehat{AB}$ a $\widehat{GH}$. Oba tyto oblouky mají stejnou délku, a tak můžeme psát

$$\widehat{AB} + \widehat{GH} = 2\widehat{AB} = \widehat{AC} \sim 4°20' .$$

Hledanou délku úsečky AK získáme jako polovinu délky tětivy AC, kterou dnes počítáme přímo pomocí funkce sinus:

$$|AK| = \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot \mathsf{crd}\, 4°20' = 60 \cdot \sin 2°10' \approx 2\frac{16}{60} .$$

Ve výsledcích zachováváme šedesátiny, které jsou odrazem šedesátkové soustavy, v níž Hipparchos počítal.

Podobně získáme délku úsečky LF. Oblouk $\widehat{AF}$ (délka jara) odpovídá úhlu $93°9'$, přesahuje tedy pravý úhel o $3°9'$, což odpovídá součtu délek oblouků $\widehat{AB}$ a $\widehat{EF}$. Protože $\widehat{AB} \sim 2°10'$, dostáváme $\widehat{EF} \sim 59'$. Odtud již snadno dopočítáme délku úsečky LF:

$$2 \cdot |LF| = 60 \cdot \mathsf{crd}\,(2 \cdot 59') = 60 \cdot 2 \cdot \mathsf{sin}\,59' \approx 2\frac{4}{60}\,,$$

neboli $|LF| = 1\frac{2}{60}$.

Výpočet excentricity e (tedy vzdálenosti středu excentru od Země) je díky kolmosti os v Hipparchově modelu přímou aplikací Pýthagorovy věty:

$$e^2 = |AK|^2 + |LF|^2 = \left(2\frac{16}{60}\right)^2 + \left(1\frac{2}{60}\right)^2 \approx 6\frac{12}{60}\,.$$

Po odmocnění odtud dostaneme přibližnou hodnotu $e \approx 2 + \frac{29{,}5}{60}$, po zaokrouhlení $e \approx 2\frac{30}{60} = \frac{60}{24}$, což představuje $\frac{1}{24}$ poloměru excentru (poloměr excentru zvolen 60).

Získali jsme tak všechny parametry modelu pohybu Slunce, který stál přímo u zrodu předchůdce dnešní goniometrie.

Literatura

[Al] ALEKSANDROVA N. V. *Matěmatičeskije těrminy.* Vysšaja škola, Moskva, 1978.

[Be] BEČVÁŘ J., BEČVÁŘOVÁ M., VYMAZALOVÁ H. *Matematika ve starověku. Egypt a Mezopotámie.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 23, Prometheus, Praha, 2003.

[Br] BRUMMELEN G. *The Mathematics of the Heavens and the Earth.* PUP, Princeton, 2009.

[Ca] CAJORI F. *A History of Mathematical Notations.* (1. a 2. díl) Dover, New York, 1993.

[Ch] CHABERT J.-L. (ed.) *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip.* Springer–Verlag, Berlin, 1999.

[Ev] EVANS J. *The History and Practice of Ancient Astronomy*, OUP, Oxford, 1998.

[Gr] GRYNAEUS S. (ed.) *Kl. Ptolemaiú Megalés syntaxeós bibl. IΓ.* Editio princeps, Pars I, Basilej, 1538.

[He] HEIBERG J. L. (ed.) *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia volumen I., Syntaxis mathematica.* Pars I, Libros I – VI. Teubner, Lipsko, 1898.

[Ju] JUŠKEVIČ A. P. *Dějiny matematiky ve středověku.* Academia, Praha, 1977.

[Šp] ŠPELDA D. *Astronomie v antice*, Montanex, Ostrava, 2006.

[Št] ŠTEFL V. *Klaudios Ptolemaios.* Edice Velké postavy vědeckého nebe, svazek č. 15, Prometheus, Praha, 2005.

[T1] TOOMER G. J. *Ptolemy's Almagest.* PUP, Princeton, 1998.

[T2] TOOMER G. J. *The Chord Table of Hipparchus and Early History of Greek Trigonometry.* Centaurus **18**(1973), 6–28.

[Vy] VYMAZALOVÁ H. *Staroegyptská matematika. Hieratické matematické texty.* Edice Dějiny matematiky, svazek č. 31, Český egyptologický ústav, Praha, 2006.

[Wa] WALTHER J. *A Unified Algorithm for Elementary Functions.* Spring Joint Computer Conference Proceedings, **38**(1971), 379–385.